-EXERCICE 29.3-

• ENONCE :

« Guide d'onde à section rectangulaire »

• On considère un cylindre droit métallique et creux, d'axe Oz, à section rectangulaire définie par : $0 \leq x \leq a$ et: $0 \leq y \leq b$

Le cylindre est illimité selon Oz et rempli d'air assimilable à du vide du point de vue électrique.

La conductivité des parois étant très grande, nous avons vu dans l'exercice 29.2 (« effet de peau ») que les champs de haute fréquence ne pénétreraient que très peu dans le métal :nous prendrons un modèle (dit du « conducteur parfait », où $\gamma \rightarrow \infty$) dans lequel $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont **nuls** dans le métal. Le champ électromagnétique est donc confiné à l'intérieur du cylindre : on parle de « **propagation guidée** » par opposition à la propagation libre à partir d'une source rayonnante.

1) Dans ces conditions, donner les conditions aux limites vérifiées par $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sur les parois.

• On s'intéresse à un champ électrique de la forme :

$$\underline{\vec{E}}(x,y,z,t) = f(x,y)\exp[i(\omega t - kz)]\vec{e}_y \qquad (k \in \mathbb{R})$$

2) Montrer que $f(x,y)$ ne dépend pas de y.

Donner l'équation satisfaite par $f(x)$ et en déduire une condition vérifiée par k .

Déterminer les expressions possibles de $f(x)$ et établir la relation de dispersion.

Définir un ensemble de pulsations critiques et discuter de la forme des solutions selon la valeur de la pulsation .

Calculer la plus petite fréquence d'une onde pouvant se propager dans le guide avec a=3cm.

Calculer les vitesses de phase et de groupe, les comparer à c et conclure.

3) Déterminer le champ magnétique ; vérifier qu'il satisfait aux conditions aux limites de la question 1). Le champ $\vec{B}$ n'est pas transversal : est-ce un paradoxe ?

4) Calculer les moyennes temporelles de la puissance transportée par le guide et de l'énergie électromagnétique par unité de longueur, soit respectivement $\langle P \rangle_T$ et $\left\langle \dfrac{dW_{EM}}{dz} \right\rangle_T$.

En déduire la vitesse de propagation de l'énergie v_E ; la comparer à la vitesse de groupe v_g et conclure.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

• CORRIGE :

« Guide d'onde à section rectangulaire »

1) La continuité des composantes tangentielle de $\vec{E}$ et normale de $\vec{B}$, associée à la nullité des champs dans le métal, donnent les relations suivantes :

$$\boxed{E_T = B_N = 0 \quad \text{en } x=0 \text{ et } x=a, \text{ ainsi qu'en: } y=0 \text{ et } y=b}$$

2) • dans le vide : $div\vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{f \text{ ne dépend que de x}}$

• équation de d'Alembert : $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\frac{d^2 f}{dx^2} + (\frac{\omega^2}{c^2} - k^2) f = 0}$

(après simplification par $e^{i(\omega t - kz)}$)

♦ $k^2 \succ \frac{\omega^2}{c^2}$: conduit à des solutions en **exponentielles réelles** qui ne peuvent s'annuler en 2 points sans s'annuler partout ⇒ cas inintéressant.

♦ $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$: les solutions sont **affines** et sont nulles partout comme précédemment.

♦ $\boxed{k^2 \prec \frac{\omega^2}{c^2}}$: $f(x) = E_0 \sin Kx + E_0^{'} \cos Kx$ avec: $K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$; $f(0) = 0$ impose : $\boxed{E_0^{'} = 0}$

Par ailleurs : $f(a) = 0 \Rightarrow \sin(Ka) = 0 \Rightarrow Ka = \frac{n\pi}{a}$ avec: $n \in \mathbb{N}$ ⇒ on tient la relation de dispersion :

$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$ et : $\boxed{\underline{\vec{E}_n} = E_0 \sin(\frac{n\pi x}{a}) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y}$ (cette solution est appelée « **mode n** »)

Rq : le champ précédent est transverse et porté seulement par $\vec{e}_y$; si le champ avait également une composante selon $\vec{e}_x$, alors les amplitudes serait de la forme $E_0 \sin(\frac{n\pi x}{a})\sin(\frac{m\pi y}{b})$: les modes seraient alors caractérisés par un couple $(n,m) \in \mathbb{N}^2$. Le champ étudié dans cet exercice (qui est « transverse électrique » et où m=0) est noté $T.E_{n0}$ (le mode fondamental étant $T.E_{10}$).

• Pour qu'une onde se propage, il faut que le **vecteur d'onde soit réel**, d'où :

$\boxed{\omega \succ \omega_{n,c} = \frac{n\pi c}{a}}$ qui définit un ensemble de pulsations critiques (une pulsation par mode n)

Si $\omega \prec \omega_{n,c}$, k est **imaginaire** et le champ est de la forme : $E_0 \exp(k"z)\sin(\frac{n\pi x}{a})\exp(i\omega t)$; il n'y a plus propagation de la phase et, le vide ne pouvant être amplificateur, k'' est négatif : l'amplitude s'amortit exponentiellement, on parle « **d'onde évanescente** » ou « **onde stationnaire exponentiellement amortie** » (à ne pas confondre avec une « pseudo-O.P.P.M » où il y a encore propagation de la phase ; voir exercice 29.2).

Le guide se comporte donc comme un « **filtre passe-haut** ».

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

On peut alors calculer la plus petite fréquence pouvant se propager, qui correspond au mode fondamental :

$$\boxed{f_{1,c}=\frac{\omega_{1,c}}{2\pi}=\frac{\pi c}{2\pi a}=5GHz}$$ (domaine des hyperfréquences)

Rq : quand on examine la forme des solutions pour le champ électrique, on constate qu'à **x fixé**, les variables z et t sont « mélangées » dans le terme de phase, l'onde est alors **progressive** ; mais à **z fixé**, les variables x et t sont séparées ⇒ l'onde est **stationnaire** de ce point de vue.

• La vitesse de phase se calcule ainsi :

$$v_\varphi=\frac{\omega}{k}=\frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{n^2\pi^2}{a^2}}}=\frac{c}{\sqrt{1-\frac{n^2\pi^2c^2}{a^2\omega^2}}}\quad\Rightarrow\quad\boxed{v_\varphi(\omega)=\frac{c}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)^2}}\succ c}$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation ⇒ il y a **dispersion** : ce n'est pas le vide en soi qui est dispersif, mais bien le mode de propagation **guidé** (contrairement à la propagation libre).

Pour la vitesse de groupe, on peut différentier la relation de dispersion : $2kdk=\frac{2\omega d\omega}{c^2}$ ⇒

$\frac{\omega}{k}\times\frac{d\omega}{dk}=c^2$ ou: $v_g\times v_\varphi=c^2$ (cette relation **n'est pas** générale) ⇒ $\boxed{v_g=c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{n,c}}{\omega}\right)^2}\prec c}$

Comme signalé dans le cours, la vitesse de phase, qui est une grandeur purement mathématique, peut être supérieure à c ; la vitesse de groupe, ou vitesse d'enveloppe, peut représenter une grandeur physique comme l'énergie ou la position de la crête d'un paquet d'ondes (elle doit donc rester inférieure à c).

3) • L'onde envisagée **n'étant pas plane** (dépendance spatiale en x ET z), on ne peut utiliser la relation de structure des O.P.P.M ; nous nous servirons de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\underline{\vec{E}}=-\frac{\partial\underline{\vec{B}}}{\partial t}\Rightarrow\begin{cases}-i\omega\underline{B_x}=-\frac{\partial\underline{E_y}}{\partial z}=ikE_0\sin(\frac{n\pi x}{a})\exp[i(\omega t-kz)]\\-i\omega\underline{B_z}=\frac{\partial\underline{E_y}}{\partial x}=\frac{n\pi E_0}{a}\cos(\frac{n\pi x}{a})\exp[i(\omega t-kz)]\end{cases}\Rightarrow$$

$$\boxed{B_x=-\frac{E_0k}{\omega}\sin(\frac{n\pi x}{a})\cos(\omega t-kz)\ ;\ B_z=-\frac{E_0n\pi}{a\omega}\cos(\frac{n\pi x}{a})\sin(\omega t-kz)}$$

• Sur les parois y=0 et y=b : la composante normale de $\vec{B}$ serait $B_y=0$ ⇒ vérifié ($B_N=0$).

Sur les parois x=0 et x=a : la composante normale de $\vec{B}$ est B_x ; or $\sin(o)=\sin(n\pi)=0$.

• Il n'y a rien de paradoxal au fait que le champ magnétique ne soit pas transversal, puisque l'onde n'est pas plane comme signalé plus haut.

4) • **Calcul du vecteur de Poynting :** $\vec{\Pi}=\vec{E}\wedge\frac{\vec{B}}{\mu_0}=\frac{E_yB_z}{\mu_0}\vec{e}_x-\frac{E_yB_x}{\mu_0}\vec{e}_z$ (repasser en réel !...)

Or E_y et B_z sont en **quadrature** ⇒ $\boxed{\langle E_yB_z\rangle_T=0\ \Rightarrow\ \Pi_x=0}$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

(normal pour une onde stationnaire selon la direction Ox).

Compte-tenu de $\left\langle \cos^2(\omega t - kz)\right\rangle_T = 1/2$, il vient : $\left\langle \vec{\Pi}\right\rangle_T = \dfrac{E_0^2 k}{2\mu_0\omega}\sin^2(n\pi x/a)\vec{e}_z$ (progression selon z)

D'où : $\left\langle P\right\rangle_T = \iint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}$ (S= section du guide) $\Rightarrow \left\langle P\right\rangle_T = \dfrac{E_0^2 bk}{2\mu_0\omega}\int_0^a \sin^2(n\pi x/a)dx$

Après linéarisation du $\sin^2$, il vient : $\boxed{\left\langle P\right\rangle_T = \dfrac{E_0^2 abk}{4\mu_0\omega}}$

Rq : cette puissance transportée ne dépend pas de z, ce qui traduit l'absence d'atténuation de l'onde ; le vide est non absorbant, mais de l'énergie pourrait être perdue lors des réflexions sur les parois (effet Joule) : dans notre modèle, le conducteur est parfait et il n'y a pas d'énergie dissipée. En pratique, les parois du guide seront constituées d'un métal commun (aluminium par exemple), recouvertes d'une fine couche d'or dont la meilleure conductivité diminuera les pertes (= compromis rendement-prix).

• **<u>Calcul de la densité linéique d'énergie</u> :**

$$\left\langle \frac{dW_{EM}}{d\tau}\right\rangle_T = \left\langle \frac{\varepsilon_0 E_y^2}{2}\right\rangle_T + \left\langle \frac{B_x^2 + B_z^2}{2\mu_0}\right\rangle_T = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}\sin^2(n\pi x/a) + \frac{E_0^2}{4\mu_0\omega^2}[k^2\sin^2(n\pi x/a) + \frac{n^2\pi^2}{a^2}\cos^2(n\pi x/a)]$$

Nous allons intégrer sur la section S=ab du guide, avec dS=bdx ; comme précédemment, on a :

$\int_0^a \sin^2(n\pi x/a)dx = \int_0^a \cos^2(n\pi x/a)dx = a/2$; il vient alors :

$\left\langle \dfrac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T = \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2 ab}{8} + \dfrac{E_0^2 ab}{8\mu_0\omega^2}(k^2 + \dfrac{n^2\pi^2}{a^2})$; avec $k^2 + \dfrac{n^2\pi^2}{a^2} = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ et $\mu_0 = \dfrac{1}{\varepsilon_0 c^2}$, on obtient :

$$\boxed{\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T = \frac{\varepsilon_0 ab E_0^2}{4}}$$

• **<u>Calcul de la vitesse de l'énergie</u> :** nous allons calculer l'énergie moyenne qui traverse une section du guide pendant le temps dt (dt petit à notre échelle, grand par rapport à la période T de l'onde) de 2 manières différentes :

♦ lien direct entre énergie et puissance : $\left\langle dW_{EM}\right\rangle_T = \left\langle P\right\rangle_T dt = \dfrac{kabE_0^2}{4\mu_0\omega}dt$

♦ la même énergie est contenue dans un cylindre de section S, de longueur $dl = v_E dt$ (des « photons » animés de la vitesse v_E et situés au-delà de la distance dl ne pourront franchir la section choisie dans le temps imparti dt) ; on écrit alors :

$$\left\langle dW_{EM}\right\rangle_T = \left\langle \frac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T \times v_E dt = \frac{\varepsilon_0 abE_0^2}{4}v_E dt \quad\Rightarrow\quad v_E = \frac{\left\langle P\right\rangle_T}{\left\langle \frac{dW_{EM}}{dz}\right\rangle_T} = \frac{k}{\varepsilon_0\mu_0\omega} \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_E = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g}$$

Rq : pour cette situation, et par 2 approches complètement différentes, nous avons obtenu un lien direct (l'égalité !) entre vitesse de groupe et vitesse de l'énergie ; rappelons que pour une propagation « trop » dispersive, ce lien ne serait pas aussi simple.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.